第 33 卷 第 4 期
2024 年 4 月

运 筹 与 管 理
OPERATIONS RESEARCH AND MANAGEMENT SCIENCE

Vol. 33, No. 4
Apr. 2024

基于一致性和共识性分析的区间互补偏好关系群决策方法

孟凡永[1,2], 汪怡雯[2]

(1. 南京信息工程大学 管理工程学院,江苏 南京 210044; 2. 中南大学 商学院,湖南 长沙 410083)

摘 要:为应对决策问题的复杂性和不确定性,本文提出一种基于加性一致性和共识性分析的区间互补偏好关系群决策方法。主要包括:针对现有区间互补偏好关系加性一致性定义的局限性,本文基于区间判断矩阵的中值和偏差,提出一种新加性一致性定义并介绍其性质;针对不完全区间互补偏好关系,本文通过构建规划模型确定区间互补偏好关系的残缺信息;针对不一致区间互补偏好关系,本文提出一致性检验模型和一致性调整模型;基于距离测度定义共识度量指标,并展开加性一致区间互补偏好关系共识性分析。最后,通过一个算例说明所提方法的合理性和可行性。

关键词:群决策;区间互补偏好关系;一致性;共识性;规划模型

中图分类号:O221 **文章标识码**:A **文章编号**:1007-3221(2024)04-0070-07 **doi**:10.12005/orms.2024.0114

Approach to Group Decision Making with Interval Complementary Preference Relations Based on Consistency and Consensus Analysis

MENG Fanyong[1,2], WANG Yiwen[2]

(1. *School of Management Science and Engineering*, *Nanjing University of Information Science and Technology Nanjing* 210044, *China*; 2. *School of Business*, *Central South University*, *Changsha* 410083, *China*)

Abstract: Interval fuzzy preference relations have the advantages of intervals and preference relations, which have been widely concerned. Interval is one type of the simplest fuzzy evaluation information, which can easily represent the upper and lower bounds of the decision makers' uncertain judgment. Preference relation reduces the requirement for the decision makers that only needs decision makers to provide the pairwise comparative value of objects. However, the current consistency research on interval fuzzy preference relationships still has some shortcomings. For example, the complementarity and order invariance cannot be guaranteed.

This paper first summarizes the limitations of previous additive consistency concepts of interval complementary preference relations. Then, a new group decision making method is developed based on the additive consistency and consensus analysis. The main contributions are as follows: a new additive consistency concept based on the median and deviation of the interval judgment matrix is proposed and its properties are discussed. For the incomplete interval complementary preference relations, a programming model is built to determine the missing value. or the inconsistent interval complementary preference relations, this paper establishes several models to judge and adjust its inconsistency. Based on the interval distance measure, a consensus index is proposed and the consensus analysis of additive consistent interval complementary preference relations is carried out.

The new approach is implemented in a practical scenario: assessing and choosing suppliers of spare parts. Upon conducting a sensitivity analysis of decision outcomes, the new method shows good robustness. Moreover, the effectiveness and superiority of the new method are demonstrated, compared with other decision-making methods. Notably, the new method eliminates their theoretical limitations.

The new method is based on complete additive consistency, which is difficult to achieve in practical decision making. Thus, the subsequent research can be based on satisfactory additive consistency. Considering the difference in the characteristics of decision makers, the preference relationship with heterogeneous information is worth

收稿日期:2022-04-09

基金项目:国家自然科学基金面上项目(72371134);国家社会科学基金资助项目(23FGLB052);教育部人文社科基金项目(22YJ630061)

作者简介:孟凡永(1981-),男,山东青州人,教授,研究方向:博弈模型建立与分析,博弈分配机制研究,不确定多属性决策,偏好关系,供应链管理等;汪怡雯(1996-),通讯作者,女,广东东莞人,硕士,研究方向:偏好关系。

further study. It is worth noting that the theoretical results of this paper can be extended to other types of preference relationships, such as triangular complementary preference relationship, intuitive complementary preference relationship, hesitant complementary preference relationship, and double-hierarchical linguistic preference relationship.

Key words: group decision making; interval complementary preference relations; additive consistency; consensus; programming model

0　引言

鉴于决策问题的复杂性和专家认知的局限性,在实际决策过程中专家难以给出清晰判断,因此区间互补偏好关系作为一个有效的决策工具得到广泛研究。由于专家自身能力及经验限制,提供的区间判断矩阵可能存在信息缺失或偏好信息不一致等问题,因而残缺信息的确定和一致性分析是区间互补偏好关系的重点研究方向。

基于 TANINO[1] 的互补偏好关系加性一致性定义,XU 和 CHEN[2] 提出区间互补偏好关系加性一致性定义,并通过建立线性规划模型获得优先权重向量。随后,HU 等[3] 指出 XU 和 CHEN[2] 中权重向量和互补偏好关系间的变换关系未必成立,并对该定义进行优化。与前者不同的是,LIU 等[4] 采用凸组合方法提出区间互补偏好关系加性一致性定义。WANG 和 LI[5] 通过区间判断上下界重新定义区间互补偏好关系加性一致性,并根据归一化区间权重与加性一致区间互补偏好关系间的关系,建立目标规划模型以获得区间优先权重向量。XU 等[6] 将 TANINO[1] 的互补偏好关系加性一致性定义扩展到区间互补偏好关系中,并提出一种估计残缺信息的方法。MENG 等[7] 基于准区间概念重新定义区间互补偏好关系的加性一致性,并展开残缺信息确定、一致性分析和共识性分析等研究。基于区间限制运算,KREJČÍ[8] 提出更灵活的区间互补偏好关系加性一致性定义。另外,为解决区间互补偏好关系中区间运算不满足全局互补性和一致性的问题,GONG 等[10] 首次提出不确定偏好关系概念,并证明区间互补偏好关系及其加性一致性定义等价于线性不确定偏好关系及其加性一致性定义。基于此,GUO 等[11] 通过构建优化模型探讨不完全或不一致的问题,并给出权重向量的求解模型。此外,WANG 等[12] 采用参数传递性方程式定义区间互补偏好关系的加性一致性,并提出获得规范化区间模糊效用向量的新模型。

尽管学者们提出多种一致性定义,但存在不满足互补性、序不变性等局限性,因此本文进一步展开区间互补偏好关系加性一致性分析,并给出区间互补偏好关系群决策方法。首先,本文通过构造中值矩阵和端点矩阵定义区间互补偏好关系的加性一致性,并介绍其性质;其次,针对不完全或不一致的区间互补偏好关系,通过构建规划模型获得满足加性一致性的完全区间互补偏好关系;再次,基于距离测度展开共识性分析,并提出基于加性一致性和共识性分析的区间互补偏好关系群决策方法;最后,通过算例说明所提方法的合理性和可行性。

1　理论基础

鉴于成对判断矩阵的不确定性和模糊性,XU[13] 提出区间互补偏好关系。

定义 1[13]　记 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为方案集,定义在 X 上的区间互补偏好关系 $\bar{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 表示为:

$$r_{ij}^{-}+r_{ji}^{+}=r_{ji}^{-}+r_{ij}^{+}=1,\bar{r}_{ii}=[0,5,0.5] \tag{1}$$

其中 $\bar{r}_{ij}=[r_{ij}^{-},r_{ij}^{+}]\subseteq[0,1]$,$i,j=1,2,\cdots,n$。

一致性分析是避免区间互补偏好关系决策结果不合理的前提。因此,学者们对区间互补偏好关系的加性一致性定义展开大量研究。LIU 等[4] 基于凸组合法,给出加性一致性定义:

定义 2[4]　记 $\bar{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 是一个区间互补偏好关系。当 $\mathbf{L}=(l_{ij})_{n\times n}$ 和 $\mathbf{U}=(u_{ij})_{n\times n}$ 满足加性传递性,称 $\bar{\mathbf{R}}$ 具有加性一致性,其中:

$$l_{ij}=\begin{cases}r_{ij}^{-}, & i<j\\ 0.5, & i=j\\ r_{ij}^{+}, & i>j\end{cases} \text{和 } u_{ij}=\begin{cases}r_{ij}^{+}, & i<j\\ 0.5, & i=j\\ r_{ij}^{-}, & i>j\end{cases}。$$

该定义虽满足加性互补性,但受到备选方案比较顺序的影响,最终影响排序结果,即不满足序不变性。为解决此问题,WANG 和 LI[5] 基于传统区间运算提出如下加性一致性定义:

定义 3[5]　记 $\bar{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 是一个区间互补偏好关系。若 $\bar{\mathbf{R}}$ 满足 $\bar{r}_{ij}+\bar{r}_{jk}+\bar{r}_{ki}=\bar{r}_{ik}+\bar{r}_{kj}+\bar{r}_{ji}$,$i,k,j=1,2,\cdots,n$,则称 $\bar{\mathbf{R}}$ 具有加性一致性。

但该定义不满足加性互补性,并且无法应对不

完全或不一致区间互补偏好关系。针对上述定义局限性，KREJ ČÍ[8] 基于区间限制运算，重新定义加性一致性如下：

定义 4[8] 记 $\bar{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 是一个区间互补偏好关系。当 $\forall r_{ij}\in\bar{r}_{ij}$，$\exists r_{ik}\in\bar{r}_{ik}\wedge\exists r_{kj}\in\bar{r}_{kj}$ 满足 $r_{ij}=r_{ik}+r_{kj}-0.5$ 时，称 $\bar{\mathbf{R}}$ 具有加性一致性。

定义 4 比定义 2 和定义 3 更灵活，但其无法有效解决残缺或非一致区间互补偏好关系。残缺信息或一致性调整分析过程中，会出现多组满足加性一致性的完全区间互补偏好关系，不同的区间互补偏好关系将获得不同的排序结果。

GONG 等[10] 基于不确定理论提出线性不确定偏好关系，并给出如下加性一致性定义：

定义 5[10] 记 $\bar{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 是一个线性不确定偏好关系，若 $\forall\alpha\in[0,1]$，满足 $(1-\alpha)r_{ik}^{-}+\alpha r_{ik}^{+}+(1-\alpha)r_{kj}^{-}+\alpha r_{kj}^{+}=(1-\alpha)r_{ij}^{-}+\alpha r_{ij}^{+}+0.5$，$i,k,j=1,2,\cdots,n$，$i<k<j$，则称 $\bar{\mathbf{R}}$ 具有加性一致性。

性质 1 定义 5 和定义 2 的加性一致性定义具有等价关系。

由性质 1 可知，定义 5 和定义 2 存在相同的局限性。综上，已有区间互补偏好关系加性一致性的局限性可总结为：1）不满足序不变性；2）不满足加性互补性；3）无法有效解决残缺且非一致的问题。

2 区间互补偏好关系

2.1 新加性一致性定义

针对以往区间互补偏好关系加性一致性定义的局限性，本文通过构造中值矩阵和端点矩阵给出一种新加性一致性定义。

定义 6 令 $\bar{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 为区间互补偏好关系，$\bar{\mathbf{R}}$ 的中值矩阵 $\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times n}$ 和端点矩阵 $\mathbf{P}=(p_{ij})_{n\times n}$ 定义如下：

$$\begin{cases}m_{ij}=(r_{ij}^{-}+r_{ij}^{+})/2\\ p_{ij}=m_{ij}+x_{ij}\Delta\bar{r}_{ij}\\ \Delta\bar{r}_{ij}=(r_{ij}^{+}-r_{ij}^{-})/2\\ x_{ij}+x_{ji}=1\\ x_{ij}=-1\vee 1,i,j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

性质 2 记 $\bar{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 为区间互补偏好关系，$\bar{\mathbf{R}}$ 的中值矩阵和端点矩阵满足加性互补性。

接下来，我们通过中值矩阵和端点矩阵定义区间互补偏好关系的加性一致性。

定义 7 记 $\bar{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 记为区间互补偏好关系，若对任意 $i,k,j=1,2,\cdots,n$，$\bar{\mathbf{R}}$ 的中值矩阵 $\mathbf{M}$ 和端点矩阵 $\mathbf{P}$ 满足加性传递性：

$$\begin{cases}m_{ij}=m_{ik}+m_{kj}-0.5\\ p_{ij}=p_{ik}+p_{kj}-0.5\end{cases}\tag{2}$$

则称 $\bar{\mathbf{R}}$ 具有加性一致性。

为说明定义 7 的合理性，接下来讨论其相关性质。

性质 3 $\bar{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 是满足定义 7 的加性一致区间互补偏好关系，当且仅当

$$\begin{cases}m_{ij}=m_{ik}+m_{kj}-0.5\\ p_{ij}=p_{ik}+p_{kj}-0.5\end{cases}\tag{3}$$

其中 $\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times n}$ 和 $\mathbf{P}=(p_{ij})_{n\times n}$ 分别是 $\bar{\mathbf{R}}$ 的中值矩阵和端点矩阵，$i,k,j=1,2,\cdots,n$，$i<k<j$。

性质 4 记 $\bar{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 为区间互补偏好关系，$\bar{\mathbf{R}}$ 是加性一致性的当且仅当 $m_{ij}=m_{ik}+m_{kj}-0.5$，并且存在一组变量 x_{ij} 使得：

$$x_{ij}\Delta\bar{r}_{ij}=x_{ik}\Delta\bar{r}_{ik}+x_{kj}\Delta\bar{r}_{kj}\tag{4}$$

其中 $m_{ij}=(r_{ij}^{-}+r_{ij}^{+})/2$，$\Delta\bar{r}_{ij}=(r_{ij}^{+}-r_{ij}^{-})/2$，$x_{ij}\in\{-1,1\}$，$i,k,j=1,2,\cdots,n$，$i<k<j$。

性质 5 记 $\bar{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 是满足定义 7 的加性一致区间互补偏好关系，则 $\bar{\mathbf{R}}$ 必满足下列三种情况之一：

$$\begin{cases}r_{ij}^{+}=r_{ik}^{+}+r_{kj}^{+}-0.5\\ r_{ij}^{-}=r_{ik}^{-}+r_{kj}^{-}-0.5\end{cases},$$

$$\begin{cases}r_{ij}^{+}=r_{ik}^{-}+r_{kj}^{+}-0.5\\ r_{ij}^{-}=r_{ik}^{+}+r_{kj}^{-}-0.5\end{cases},$$

$$\begin{cases}r_{ij}^{+}=r_{ik}^{+}+r_{kj}^{-}-0.5\\ r_{ij}^{-}=r_{ik}^{-}+r_{kj}^{+}-0.5\end{cases}。$$

其中 $i,k,j=1,2,\cdots,n$，$i<k<j$。

性质 6 若区间互补偏好关系 $\bar{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 满足定义 7 的加性一致性，则 $\bar{\mathbf{R}}$ 满足序不变性。

性质 7 令 $\bar{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 为区间互补偏好关系，则下列叙述等价：

1）根据定义 7，$\bar{\mathbf{R}}$ 是加性一致的；

2）根据性质 3，$\bar{\mathbf{R}}$ 是加性一致的；

3）根据性质 4，$\bar{\mathbf{R}}$ 是加性一致的；

4）$\begin{cases}m_{ij}+m_{jk}+m_{ki}=m_{ik}+m_{kj}+m_{ji}\\ p_{ij}+p_{jk}+p_{ki}=p_{ik}+p_{kj}+p_{ji}\end{cases}$；

5）$\begin{cases}m_{ij}+m_{jk}+m_{ki}=3/2\\ p_{ij}+p_{jk}+p_{ki}=3/2\end{cases}$。

其中 m_{ij} 和 p_{ij} 分别是中值矩阵 $\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times n}$ 和 $\mathbf{P}=(p_{ij})_{n\times n}$ 端点矩阵的元素，$i,k,j=1,2,\cdots,n$。

2.2 残缺信息的确定

鉴于决策问题的复杂性和专家认知的不确定

性，专家提供的偏好信息通常是不完全的。针对不完全区间互补偏好关系，本文基于新一致性定义，通过构建规划模型确定残缺信息。

令 $\overline{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 为一个残缺区间互补偏好关系，即 $\overline{\mathbf{R}}$ 中存在未知元素。对任意不完全区间互补偏好关系 $\overline{\mathbf{R}}$，U^- 表示左端点 r_{ij}^- 为未知元素的集合，U^+ 表示右端点 r_{ij}^+ 为未知元素的集合。若 $\overline{\mathbf{R}}$ 满足定义 7 的加性一致性，可得：

$$\begin{cases}(n-2)(r_{ij}^+ + r_{ij}^- + 1) = \\ \sum\limits_{k=1,k\neq i,j}^{n}(r_{ik}^+ + r_{ik}^- + r_{kj}^+ + r_{kj}^-) \\ (n-2)x_{ij}(r_{ij}^+ - r_{ij}^-) = \\ \sum\limits_{k=1,k\neq i,j}^{n}(x_{ik}(r_{ik}^+ - r_{ik}^-) + x_{kj}(r_{kj}^+ - r_{kj}^-))\end{cases} \tag{5}$$

其中 $x_{ij}\in\{-1,1\}$，$i,k,j=1,\cdots,n,i<j,k\neq i,\ j$。

若 $\overline{\mathbf{R}}$ 不满足定义 7 的加性一致性，将正负偏差变量 $\delta_{ij}^+,\delta_{ij}^-,\sigma_{ij}^+$ 和 σ_{ij}^- 引入(5)式得：

$$\begin{cases}(n-2)(r_{ij}^+ + r_{ij}^- + 1) - \delta_{ij}^+ + \delta_{ij}^- - \\ \sum\limits_{k=1,k\neq i,j}^{n}(r_{ik}^+ + r_{ik}^- + r_{kj}^+ + r_{kj}^-) = 0 \\ (n-2)x_{ij}(r_{ij}^+ - r_{ij}^-) - \sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^- - \\ \sum\limits_{k=1,k\neq i,j}^{n}(x_{ij}(r_{ik}^+ - r_{ik}^-) + x_{kj}(r_{kj}^+ - r_{kj}^-)) = 0 \\ \delta_{ij}^+,\delta_{ij}^-,\sigma_{ij}^+,\sigma_{ij}^- \geq 0 \\ x_{ij} = -1 \vee 1\end{cases} \tag{6}$$

其中 $x_{ij}\in\{-1,1\}$，$i,k,j=1,\cdots,n,i<j,k\neq i,j$。

为获得区间判断的未知值，本文构建下列规划模型：

$$G_4=\min\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\delta_{ij}^+ + \delta_{ij}^- + \sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}(6)\text{式} \\ 0\leq r_{ij}^- \leq r_{ij}^+,r_{ji}^+ = 1-r_{ij}^-,r_{ij}^- \in U^- \wedge r_{ij}^+ \notin U^+ \\ r_{ij}^- \leq r_{ij}^+ \leq 1,r_{ji}^- = 1-r_{ij}^+,r_{ij}^- \notin U^- \wedge r_{ij}^+ \in U^+ \\ 0\leq r_{ij}^- \leq r_{ij}^+ \leq 1,r_{ji}^+ = 1-r_{ij}^-, \\ r_{ji}^- = 1-r_{ij}^+,r_{ij}^- \in U^- \wedge r_{ij}^+ \in U^+ \\ i,j=1,2,\cdots,n,i<j\end{cases} \tag{M-1}$$

其中约束条件要求区间判断矩阵满足区间互补偏好关系定义。通过求解模型(M-1)获得具有较高加性一致性水平的完全区间互补偏好关系，下面将通过加性一致性分析获得满足加性一致性的完全区间互补偏好关系。

2.3　加性一致性分析

在实际决策过程中，专家提供的区间互补偏好关系通常不满足一致性。针对不一致情形，本文通过构建规划模型进行检验和调整。

记 $\overline{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 为区间互补偏好关系。若 $\overline{\mathbf{R}}$ 满足定义 7 的加性一致性，则可推出：

$$\begin{cases}r_{ij}^- + r_{ij}^+ - r_{ik}^- - r_{ik}^+ - r_{kj}^- - r_{kj}^+ + 1 = 0 \\ x_{ij}(r_{ij}^+ - r_{ij}^-) - x_{ik}(r_{ik}^+ - r_{ik}^-) - x_{kj}(r_{kj}^+ - r_{kj}^-) = 0\end{cases} \tag{7}$$

其中 $x_{ij}\in\{-1,1\}$，$i,k,j=1,2,\cdots,n,i<k<j$。

若 $\overline{\mathbf{R}}$ 不满足定义 7 的加性一致性，则(7)式不成立。此时引入正负偏差变量 $\eta_{ikj}^-,\eta_{ikj}^+,\varepsilon_{ikj}^-$ 和 ε_{ikj}^+，可得：

$$\begin{cases}r_{ij}^- + r_{ij}^+ - r_{ik}^- - r_{ik}^+ - r_{kj}^- - r_{kj}^+ + 1 - \eta_{ikj}^+ + \eta_{ikj}^- = 0 \\ x_{ij}(r_{ij}^+ - r_{ij}^-) - x_{ik}(r_{ik}^+ - r_{ik}^-) - \\ x_{kj}(r_{kj}^+ - r_{kj}^-) - \varepsilon_{ikj}^+ + \varepsilon_{ikj}^- = 0 \\ \eta_{ikj}^-,\eta_{ikj}^+,\varepsilon_{ikj}^-,\varepsilon_{ikj}^+ \geq 0 \\ i,k,j=1,2,\cdots,n,i<k<j \\ x_{ij} = -1 \vee 1,i,j=1,2,\cdots,n,i<j\end{cases} \tag{8}$$

若对于每个三元组(i,k,j)都有 $\eta_{ikj}^- = \eta_{ikj}^+ = \varepsilon_{ikj}^- = \varepsilon_{ikj}^+ = 0$，则 $\overline{\mathbf{R}}$ 满足加性一致性。针对 $\overline{\mathbf{R}}$ 不满足加性一致性的情形，构建下列目标规划模型：

$$G_1 = \min\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{k=i+1}^{n-1}\sum_{j=i+2}^{n}(\eta_{ikj}^- + \eta_{ikj}^+ + \varepsilon_{ikj}^- + \varepsilon_{ikj}^+)$$

$$\text{s.t.}\ (8)\text{式} \tag{M-2}$$

使用 Lingo 或 MATLAB 求解模型(M-2)，可以判断 $\overline{\mathbf{R}}$ 是否满足加性一致性。即若 $G_1=0$，$\overline{\mathbf{R}}$ 满足加性一致性。否则，不满足。针对后一种情形，可通过调整原始区间互补偏好关系使其满足加性一致性。需特别注意的是：为尽可能地保留原始信息，调整量应尽可能的小。因此，本文构建下列模型确定调整后的区间互补偏好关系 $\overline{\mathbf{R}}^*=(\bar{r}_{ij}^*)_{n\times n}=([r_{ij}^{*-},r_{ij}^{*+}])_{n\times n}$：

$$G_2 = \min\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\alpha_{ij}^- + \alpha_{ij}^+ + \beta_{ij}^- + \beta_{ij}^+)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}r_{ij}^{*-} = r_{ij}^- - \alpha_{ij}^+ + \alpha_{ij}^- \\ r_{ij}^{*+} = r_{ij}^+ - \beta_{ij}^+ + \beta_{ij}^- \\ r_{ij}^{*-} + r_{ij}^{*+} - r_{ik}^{*-} - r_{ik}^{*+} - r_{kj}^{*-} - r_{kj}^{*+} + 1 = 0 \\ x_{ij}(r_{ij}^{*+} - r_{ij}^{*-}) - x_{ik}(r_{ik}^{*+} - r_{ik}^{*-}) - \\ x_{kj}(r_{kj}^{*+} - r_{kj}^{*-}) = 0 \\ i,k,j=1,2,\cdots,n,i<k<j \\ x_{ij} = -1 \vee 1 \\ 0\leq r_{ij}^{*-} \leq r_{ij}^{*+} \leq 1 \\ \alpha_{ij}^-,\alpha_{ij}^+,\beta_{ij}^-,\beta_{ij}^+ \geq 0,i,j=1,2,\cdots,n,i<j\end{cases} \tag{M-3}$$

其中前两个约束条件通过使用正负偏差变量 α_{ij}^-，

α_{ij}^{+}，β_{ij}^{-} 和 β_{ij}^{+} 来调整原始区间偏好信息，第三至第五个约束条件用于确保 $\overline{\mathbf{R}}^{*}$ 满足加性一致性，第六个约束条件令 $\overline{\mathbf{R}}^{*}$ 满足区间限制。

为保证区间互补偏好关系调整总量最小及调整元素最少，引入 0-1 变量 μ_{ij} 和 v_{ij}：

$$G_3 = \min \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\mu_{ij}+v_{ij})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{n}\alpha_{ij}^{-}+\alpha_{ij}^{+}+\beta_{ij}^{-}+\beta_{ij}^{+}=G_2\\ \mu_{ij}=\begin{cases}0,\text{若}(\alpha_{ij}^{-}+\alpha_{ij}^{+})=0\\1,\text{若}(\alpha_{ij}^{-}+\alpha_{ij}^{+})>0\end{cases}\\ v_{ij}=\begin{cases}0,\text{若}(\beta_{ij}^{-}+\beta_{ij}^{+})=0\\1,\text{若}(\beta_{ij}^{-}+\beta_{ij}^{+})>0\end{cases}\\ \text{模型(M-3)中约束}\end{cases} \tag{M-4}$$

其中第一个约束条件是模型(M-3)目标函数的最优值，后两个约束条件用于识别区间判断是否发生改变。

3 区间互补偏好关系群决策方法

共识性分析是获得正确可行结果的前提条件，因此本文展开共识性分析，并提出基于加性一致性和共识性分析的区间互补偏好关系群决策方法。

3.1 共识性分析

假设由 q 个决策专家 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_q\}$ 对 n 个备选方案 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 进行评估。令 $\overline{\mathbf{R}}^{(h)}=(\bar{r}_{ij}^{(h)})_{n\times n}$ 为决策专家 e_h，$h=1,2,\cdots,q$，提供的个体区间互补偏好关系；$\overline{\mathbf{R}}^{*(h)}=(\bar{r}_{ij}^{*(h)})_{n\times n}$ 为满足定义 7 的加性一致区间互补偏好关系。专家偏好信息间的相似度矩阵 $\mathrm{SM}^{(hl)}=(sm_{ij}^{(hl)})_{n\times n}$ 为：

$$sm_{ij}^{(hl)}=1-(|r_{ij}^{*(h)-}-r_{ij}^{*(l)-}|+|r_{ij}^{*(h)+}-r_{ij}^{*(l)+}|) \tag{9}$$

其中 $sm_{ij}^{(hl)}$ 用于衡量专家 e_h 和 e_l 间的相似度，$h,l=1,2,\cdots,q,h<l,i,j=1,2,\cdots,n$。

定义 8 令 $\overline{\mathbf{R}}^{(h)}=(\bar{r}_{ij}^{(h)})_{n\times n}$ 为一组由决策专家 e_h，$h=1,2,\cdots,q$，提供的个体区间互补偏好关系，则专家 e_h 的共识水平为：

$$CL(\overline{\mathbf{R}}^{*(h)})=\frac{1}{q-1}\sum_{l=1,l\neq h}^{q}\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}sm_{ij}^{(hl)} \tag{10}$$

令 $\overline{CL}$ 为共识阈值，若对于所有 $h=1,\cdots,q$ 都有 $CL(\overline{\mathbf{R}}^{*(h)})\geq\overline{CL}$，表明群体意见达到共识要求。否则，令 $NE=\{h\,|\,CL(\overline{\mathbf{R}}^{*(h)})<\overline{CL},h=1,2,\cdots,q\}$。记 $\overline{\mathbf{R}}^{(t)}=\max\limits_{1\leq h\leq q}CL(\overline{\mathbf{R}}^{*(h)})$，其中 $\mathbf{M}^{(t)}=(m_{ij}^{(t)})_{n\times n}$ 和 $\mathbf{P}^{(t)}=(\mathbf{P}_{ij}^{(t)})_{n\times n}$ 分别为 $\overline{\mathbf{R}}^{(t)}$ 的中值矩阵和端点矩阵。对于任意 $o\in NE$，令 $\mathbf{M}^{\prime(o)}=(m_{ij}^{\prime(o)})_{n\times n}$ 和 $\mathbf{P}^{\prime(o)}=(p_{ij}^{\prime(o)})_{n\times n}$ 为共识调整后的中值矩阵和端点矩阵，其区间互补偏好关系为 $\overline{\mathbf{R}}^{\prime(o)}=([r_{ij}^{\prime(o)-},r_{ij}^{\prime(o)+}])_{n\times n}$。为保留更多原始信息，引入变量 $\zeta_{ij}^{(o)}$ 和 $\tau_{ij}^{(o)}$ 并构建下列模型：

$$G_5=\max\sum_{o\in NE}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\zeta_{ij}^{(o)}+\tau_{ij}^{(o)})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}CL(\overline{\mathbf{R}}^{\prime(o)})\geq\overline{CL}\\ m_{ij}^{\prime(o)}=m_{ik}^{\prime(o)}+m_{kj}^{\prime(o)}-0.5\\ p_{ij}^{\prime(o)}=p_{ik}^{\prime(o)}+p_{kj}^{\prime(o)}-0.5\\ i,k,j=1,2,\cdots,n,i<k<j\\ m_{ij}^{\prime(o)}=\zeta_{ij}^{(o)}m_{ij}^{*(o)}+(1-\zeta_{ij}^{(o)})m_{ij}^{(t)}\\ p_{ij}^{\prime(o)}=\tau_{ij}^{(o)}p_{ij}^{*(o)}+(1-\tau_{ij}^{(o)})p_{ij}^{(t)}\\ \zeta_{ij}^{(o)},\tau_{ij}^{(o)}\in[0,1]\\ r_{ij}^{\prime(o)-}=\min(2m_{ij}^{\prime(o)}-p_{ij}^{\prime(o)},p_{ij}^{\prime(o)})\\ r_{ij}^{\prime(o)+}=\max(2m_{ij}^{\prime(o)}-p_{ij}^{\prime(o)},p_{ij}^{\prime(o)})\\ i,j=1,2,\cdots,n,i<j\\ o\in NE\end{cases} \tag{M-5}$$

其中第一个约束条件要求 $\overline{\mathbf{R}}^{\prime(o)}$ 满足共识要求，后两个约束条件保证 $\overline{\mathbf{R}}^{\prime(o)}$ 满足加性一致性，其余约束条件用去确定调整后的中值矩阵、端点矩阵和区间互补偏好关系。此外，$\zeta_{ij}^{(o)}$ 和 $\tau_{ij}^{(o)}$ 越大，$\overline{\mathbf{R}}^{\prime(o)}$ 保留的偏好信息越多。

3.2 群决策方法

在给出具体决策步骤之前，首先需要计算区间优先权重向量。令 $\overline{\mathbf{R}}=(\bar{r}_{ij})_{n\times n}$ 为给定的区间互补偏好关系，$\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times n}$ 和 $\mathbf{P}=(p_{ij})_{n\times n}$ 分别为 $\overline{\mathbf{R}}$ 的中值矩阵和端点矩阵。基于此，得到区间优先权重向量 $\bar{\mathrm{w}}=(\bar{w}_1,\bar{w}_2,\cdots,\bar{w}_n)$，其中：

$$\bar{w}_i=[w_i^{-},w_i^{+}]=[\min(w_i',w_i''),\max(w_i',w_i'')] \tag{11}$$

满足 $w_i'=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(2m_{ij}-p_{ij})$，$w_i''=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}p_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots,n$。

基于上述分析，给出基于加性一致性和共识性分析的区间互补偏好关系群决策方法。其具体步骤如下：

步骤 1 假设 $\overline{\mathbf{R}}^{(h)}=(\bar{r}_{ij}^{(h)})_{n\times n}$ 是决策专家 e_h 基于备选方案两两比较得到的个体区间互补偏好关系，其中 $h=1,2,\cdots,q$。如果所有个体区间互补偏好关系 $\overline{\mathbf{R}}^{(h)}$ 不存在未知元素，则转入步骤 2。否则，利用模型(M-1)确定残缺信息。

步骤 2 对于所有个体区间互补偏好关系 $\overline{\mathbf{R}}^{(h)}=(\bar{r}_{ij}^{(h)})_{n\times n}$，$h=1,2,\cdots,q$，利用模型(M-2)判断个体区间互补偏好关系是否满足加性一致性。若所有的个体区间互补偏好关系 $\overline{\mathbf{R}}^{(h)}$ 满足加性一致性，则转入步骤 3。否则，利用模型(M-3)和模型(M-4)获得相应的加性一致区间互补偏好关系 $\overline{\mathbf{R}}^{*(h)}=(r_{ij}^{*(h)})_{n\times n}$。

步骤 3　令 $\overline{CL}$ 为共识阈值，利用(10)式衡量 $\bar{\mathbf{R}}^{*(h)}$ 的共识水平。若达到共识阈值，则转入步骤 4。否则，利用模型(M-5)提高共识水平；

步骤 4　采用(11)式求解个体区间优先权重向量 $\bar{\mathrm{w}}^{(h)}=(\bar{w}_1^{(h)},\bar{w}_2^{(h)},\cdots,\bar{w}_n^{(h)})$，$h=1,2,\cdots,q$。由此得备选方案的综合区间优先权重向量 $\bar{\mathrm{w}}=(\bar{w}_1,\bar{w}_2,\cdots,\bar{w}_n)$，其中 $\bar{w}_i=\sum_{h=1}^{q}\bar{w}_i^{(h)}/q$，$i=1,2,\cdots,n$；

步骤 5　利用 MENG 等[14]提出的可能度公式对备选方案 A 排序：

$$P(\bar{w}_i,\bar{w}_j)=\begin{cases}1, & w_i^-\geq w_j^+\\ 1-\dfrac{(w_j^+-w_i^-)^2}{2d(\bar{w}_i)d(\bar{w}_j)}, & w_i^+\geq w_j^+>w_i^->w_j^-\\ \dfrac{2w_i^+-(w_j^++w_j^-)}{2d(\bar{w}_i)}, & w_i^+\geq w_j^+>w_j^-\geq w_i^-\end{cases}\tag{12}$$

其中 $\bar{w}_i=[w_i^-,w_i^+]$ 和 $d(\bar{w}_i)=w_i^+-w_i^-$，$i,j=1,2,\cdots,n$。

4　算例分析

WV 公司正在对 H 零件供应商资质进行评估，为获得合理可靠的评估结果，公司邀请来自质检管理、生产设计、风险控制的三位领域专家 e_1,e_2,e_3 对供应商 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 进行评估，专家给出的区间互补偏好关系如表 1 所示。

令 $\overline{CL}=0.85$，根据本文提供新方法可知备选方案的排序结果为：$a_4>a_6>a_5>a_2>a_1>a_3$。

为观察排序结果的稳定性，将开展灵敏度分析，结果如表 2 所示。由表 2 可知，备选方案在不同共识阈值下的排序值有所差异，但最终排序结果都为 $a_4>a_6>a_5>a_2>a_1>a_3$。

下面将所提方法与 MENG 等[9]、GONG 等[10]的方法比较，排序结果如表 3 所示。其中，GONG 等[10]未展开不完全区间互补偏好关系研究，因此 GONG 等[10]以步骤 1 的结果为基础进行计算。

由表 3 可知三种方法的排序结果有所差异，形成差异的原因在于三种方法采用不同的加性一致性定义。MENG 等[9]是基于 KREJČÍ[8]的加性一致性定义展开探讨，由于 KREJČÍ[8]的定义比较灵活，在一致性调整过程中通常存在多组调整方案，导致最终排序结果不唯一。而 GONG 等[10]所采用的加性一致性定义不满足序不变性，若交换 a_1 和 a_2 的比较顺序，则排序结果变为 $a_4>a_6>a_5>a_2>a_1>a_3$。相比与 MENG 等[9]和 GONG 等[10]的方法，本文所提方法能有效避免上述问题。

表 1　决策专家提供的个体区间互补偏好关系

决策专家	供应商	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
e_1	a_1	[0.50,0.50]	[x,x]	[0.40,0.60]	[x,x]	[0.30,0.50]	[0.30,0.60]
	a_2	[x,x]	[0.50,0.50]	[0.50,0.70]	[0.30,0.50]	[0.30,0.40]	[0.20,0.50]
	a_3	[0.40,0.60]	[0.30,0.50]	[0.50,0.50]	[0.20,0.40]	[0.20,x]	[0.20,0.30]
	a_4	[x,x]	[0.50,0.70]	[0.60,0.80]	[0.50,0.50]	[0.60,0.70]	[0.40,0.90]
	a_5	[0.50,0.70]	[0.60,0.70]	[x,0.80]	[0.30,0.40]	[0.50,0.50]	[0.40,0.60]
	a_6	[0.40,0.70]	[0.50,0.80]	[0.70,0.80]	[0.10,0.60]	[0.40,0.60]	[0.50,0.50]
e_2	a_1	[0.50,0.50]	[0.40,0.60]	[x,0.70]	[0.20,0.30]	[0.40,x]	[x,x]
	a_2	[0.40,0.60]	[0.50,0.50]	[0.50,x]	[x,0.50]	[0.30,0.50]	[0.30,0.50]
	a_3	[0.30,x]	[x,0.50]	[0.50,0.50]	[0.10,x]	[0.10,0.40]	[0.30,0.40]
	a_4	[0.70,0.80]	[0.50,x]	[x,0.90]	[0.50,0.50]	[0.70,0.80]	[0.60,0.80]
	a_5	[x,0.60]	[0.50,0.70]	[0.60,0.90]	[0.20,0.30]	[0.50,0.50]	[0.50,0.70]
	a_6	[x,x]	[0.50,0.70]	[0.60,0.70]	[0.20,0.40]	[0.30,0.50]	[0.50,0.50]
e_3	a_1	[0.50,0.50]	[0.30,0.60]	[0.40,x]	[0.20,0.40]	[0.30,0.40]	[0.30,0.50]
	a_2	[0.40,0.70]	[0.50,0.50]	[x,x]	[0.10,0.60]	[0.20,0.50]	[x,0.60]
	a_3	[x,0.60]	[x,x]	[0.50,0.50]	[0.30,0.40]	[0.20,0.40]	[x,0.50]
	a_4	[0.60,0.80]	[0.40,0.90]	[0.60,0.70]	[0.50,0.50]	[0.50,x]	[0.40,0.70]
	a_5	[0.60,0.70]	[0.50,0.80]	[0.60,0.80]	[x,0.50]	[0.50,0.50]	[0.50,0.60]
	a_6	[0.50,0.70]	[0.40,x]	[0.50,x]	[0.30,0.60]	[0.40,0.50]	[0.50,0.50]

表 2　不同阈值下的排序值

$\overline{CL}$	排序值	$\overline{CL}$	排序值
0.85	$\bar{w}_4\overset{0.91}{>}\bar{w}_6\overset{0.62}{>}\bar{w}_5\overset{0.85}{>}\bar{w}_2\overset{0.64}{>}\bar{w}_1\overset{0.94}{>}\bar{w}_3$	0.87	$\bar{w}_4\overset{0.90}{>}\bar{w}_6\overset{0.66}{>}\bar{w}_5\overset{0.87}{>}\bar{w}_2\overset{0.67}{>}\bar{w}_1\overset{0.94}{>}\bar{w}_3$
0.89	$\bar{w}_4\overset{0.84}{>}\bar{w}_6\overset{0.67}{>}\bar{w}_5\overset{0.89}{>}\bar{w}_2\overset{0.69}{>}\bar{w}_1\overset{0.94}{>}\bar{w}_3$	0.91	$\bar{w}_4\overset{0.88}{>}\bar{w}_6\overset{0.68}{>}\bar{w}_5\overset{0.88}{>}\bar{w}_2\overset{0.76}{>}\bar{w}_1\overset{0.96}{>}\bar{w}_3$
0.93	$\bar{w}_4\overset{0.84}{>}\bar{w}_6\overset{0.71}{>}\bar{w}_5\overset{0.88}{>}\bar{w}_2\overset{0.69}{>}\bar{w}_1\overset{0.94}{>}\bar{w}_3$	0.95	$\bar{w}_4\overset{0.83}{>}\bar{w}_6\overset{0.70}{>}\bar{w}_5\overset{0.91}{>}\bar{w}_2\overset{0.78}{>}\bar{w}_1\overset{0.93}{>}\bar{w}_3$

表 3 不同方法的排序结果

方法	排序结果
MENG 等[9]	$a_4 > a_5 > a_6 > a_2 > a_1 > a_3$
GONG 等[10]	$a_4 > a_6 > a_5 > a_1 > a_2 > a_3$
本文新方法	$a_4 > a_6 > a_5 > a_2 > a_1 > a_3$

5 结束语

一致性分析和共识性分析能有效保障决策结果的合理可行性,因此本文主要探讨区间互补偏好关系的一致性和共识性,并提出区间互补偏好关系群决策方法。鉴于已有加性一致性定义的局限性,文中通过构造中值矩阵和端点矩阵重新定义区间互补偏好关系的加性一致性,新定义是互补偏好关系加性一致性的自然延伸。基于新定义,本文首先探讨其满足的基本性质,从理论视角验证新定义的合理性。其次,针对不一致区间互补偏好关系,构建一致性调整模型,所提模型可以最大程度的保留决策专家的初始偏好信息。再次,针对不完全互补偏好关系,通过构建规划模型确定残缺信息。最后,基于距离测度展开共识性分析,提出基于加性一致性和共识性分析的区间互补偏好关系群决策方法,并将所提方法应用在企业供应商选择中。

本文所提方法基于完全加性一致性,但这一要求在实际决策中难以达成。因此,后续研究可基于满意加性一致性展开。考虑到决策者的特征差异,具有异构信息的偏好关系值得进一步研究。值得注意的是,本文的理论结果可以扩展到其他类型的偏好关系中,如三角互补偏好关系、直觉互补偏好关系、犹豫互补偏好关系和双层语言偏好关系。

参考文献:

[1] TANINO T. Fuzzy preference orderings in group decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12(2): 117-131.

[2] XU Z S, CHEN J. Some models for deriving the priority weights from interval fuzzy preference relations[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 184(1): 266-280.

[3] HU M M, REN P Y, LAN J B, et al. Note on "Some models for deriving the priority weights from interval fuzzy preference relations"[J]. European Journal of Operational Research, 2014, 237(2): 771-773.

[4] LIU F, ZHANG W G, FU J H. A new method of obtaining the priority weights from an interval fuzzy preference relation[J]. Information Sciences, 2012, 185(1): 32-42.

[5] WANG Z J, LI K W. Goal programming approaches to deriving interval weights based on interval fuzzy preference relations[J]. Information Sciences, 2012, 193: 180-198.

[6] XU Y J, LI K W, WANG H M. Incomplete interval fuzzy preference relations and their applications[J]. Computers & Industrial Engineering, 2014, 67: 93-103.

[7] MENG F Y, AN Q X, TAN C Q, et al. An approach for group decision making with interval fuzzy preference relations based on additive consistency and consensus analysis[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 47(8): 2069-2082.

[8] KREJČÍ J. On additive consistency of interval fuzzy preference relations[J]. Computers & Industrial Engineering, 2017, 107: 128-140.

[9] MENG F Y, TANG J, FUJITA H. Consistency-based algorithms for decision-making with interval fuzzy preference relations[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2019, 27(10): 2052-2066.

[10] GONG Z W, GUO W W, HERRERA-VIEDMA E, et al. Consistency and consensus modeling of linear uncertain preference relations[J]. European Journal of Operational Research, 2020, 283(1): 290-307.

[11] GUO W W, GONG Z W, XU X X, et al. Additive and multiplicative consistency modeling for incomplete linear uncertain preference relations and its weight acquisition[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 29(4): 805-819.

[12] WANG Z J, LIU F Q, QIN S T, et al. New additive consistency framework and utility derivation for interval fuzzy reciprocal preference relations[J]. Journal of the Operational Research Society, 2022, 73(11): 2572-2590.

[13] XU Z S. On compatibility of interval fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2004, 3(3): 217-225.

[14] MENG F Y, CHEN X H, ZHU M X, et al. Two new methods for deriving the priority vector from interval multiplicative preference relations[J]. Information Fusion, 2015, 26: 122-135.